УДК 519.63

И. А. ТИМОЩЕНКО

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДВУСТОРОННЕЙ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Рассматривается численное решение дифференциального уравнения двусторонней диффузии с частными производными дробных порядков как по пространству, так и по времени. Используется аппроксимация дробных производных первого порядка по шагу сетки. На основе метода приближенной факторизации строится чисто неявная схема для первой начально-краевой задачи. Показывается, что приближенная факторизация разностного оператора не меняет порядок аппроксимации. Доказывается безусловная устойчивость предложенной неявной схемы без дополнительных ограничений на операторы расщепления, в частности их коммутативность. Достоинством предложенного численного метода является его достаточно простая реализация.

Ключевые слова: уравнение диффузии; аномальная диффузия; производная дробного порядка; разностная схема; факторизованная схема; устойчивость.

Numerical solution of two-sided anomalous diffusion differential equation with both space and time fractional derivatives is considered. Fractional derivatives approximation of the first order of mesh size is used. Based on approximate factorization method an implicit scheme for the first initial-boundary problem is build. It is shown that approximate factorization of the difference operator does not change the order of approximation. Unconditional stability of the scheme is proved. Proposed numerical method can be easily implemented.

Key words: anomalous diffusion; fractional derivative; difference scheme; factorization; stability.

В настоящее время дробное исчисление широко используется для моделирования процессов и систем, которые характеризуются долговременной памятью, немарковской эволюцией, степенной пространственной нелокальностью взаимодействия и фрактальной структурой [1]. Например, в процессе случайного блуждания частицы во фрактальных средах с памятью размеры прыжков и время между прыжками являются случайными величинами, распределения которых имеют бесконечную дисперсию [2, 3]. Такие процессы описываются уравнением диффузии с дробными производными по пространству и времени.

В настоящей работе предлагается метод численного решения уравнения двусторонней аномальной диффузии в многомерной области, который опирается на один из методов приближенной факторизации, хорошо зарекомендовавших себя при решении многомерных сложных задач для дифференциальных уравнений с частными производными целых порядков [4–6].

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = G \times (0,T]$, основанием которого является p-мерный параллелепипед $G = \{x = (x_1,...,x_p)|,\ 0 < x_r < l_r,\ r = \overline{1,p}\}$ с границей Γ, первую начально-краевую задачу для дифференциального уравнения с двусторонними дробными производными по пространству вида

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} = L^\alpha u(x,t) + f(x,t),\ x \in G, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G},$$

$$u(x,t)\big|_\Gamma = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

где $L^\alpha = \sum_{r=1}^{p} L_r^{(+)\alpha_r} + L_r^{(-)\alpha_r}$, $L_r^{(+)\alpha_r} = p_r \dfrac{\partial^\alpha}{\partial_+ x_r^{\alpha_r}}$, $L_r^{(-)\alpha_r} = (1-p_r)\dfrac{\partial^\alpha}{\partial_- x_r^{\alpha_r}}$, $1 < \alpha_r < 2,\ 0 < \beta < 1,\ r = 1,2,...,p$. Дробные производные в уравнении (1) определяются формулой Римана – Лиувилля [7]:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_- x^\alpha} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_x^0 \frac{u(\xi,t)d\xi}{(x-\xi)^{a-n+1}}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial_+ x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_0^x \frac{u(x,t)d\xi}{(x-\xi)^{a-n+1}}, \tag{3}$$

где n – целое число, а (2) и (3) – правосторонняя и левосторонняя дробные производные соответственно.

Задача (1) исследовалась в одномерном [4] и в двумерном [8] случаях при $\beta = 1$. В данной работе строится численное решение задачи (1) методом приближенной факторизации при $0 < \beta < 1,\ 1 < \alpha_r < 2$, $r = 1,2,...,p$, и исследуется устойчивость полученной схемы.

Введем равномерные сетки по пространству и времени:

$$\overline{w}_h = \{x_{i_1,\ldots,i_p} = (i_1 h_1, \ldots, i_p h_p) \in G,\ i_r = \overline{0,N_r},\ h_r = l_r / N_r,\ r = \overline{1,p}\},$$

$$\overline{w}_\tau = \{t_s = s\tau,\ s = 1,2,\ldots,S\}.$$

Обозначим через γ множество узлов сетки $\overline{w}_h$, принадлежащих границе Г.

Если функция $u(x,t)\in C_1^{\alpha+1}$, то для дробных производных (2) и (3) имеется аппроксимация [4, 7]

$$\frac{1}{h^\alpha}\sum_{l=0}^{N-i+1} g_{\alpha,l}u_{i+l-1}^s = \left.\frac{\partial^\alpha u}{\partial_- x^\alpha}\right|_{x=x_i} + O(h), \tag{4}$$

$$\frac{1}{h^\alpha}\sum_{l=0}^{i+1} g_{\alpha,l}u_{i-l+1}^s = \left.\frac{\partial^\alpha w}{\partial_+ x^\alpha}\right|_{x=x_i} + O(h), \tag{5}$$

где $g_{\alpha,l}=(-1)^l\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-l+1)}{l!}$; u_i^s – значение функции $u\left(x_i,t_s\right)$ в точках дискретной области. Аналогичная аппроксимация получается и для производной по времени:

$$\frac{1}{\tau^\beta}\sum_{k=0}^{s} g_{\beta,k}\left(u_i^{s-k}-u_i^0\right) = \left.\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta}\right|_{t=t_s} + O(\tau). \tag{6}$$

С помощью аппроксимации (4) – (6) задаче (1) можно сопоставить следующую конечно-разностную схему:

$$y_t^\beta = \Lambda^\alpha y^{s+1} + \varphi,\ x\in\overline{w}_h,\ t\in\overline{w}_\tau, \tag{7}$$

$$y\big|_\gamma = 0,\ t\in\overline{w}_\tau,$$

$$v_{i_1,\ldots,i_p}^0 = u_0\left(x_{i_1},...,x_{i_p}\right),\ x\in\overline{w}_h$$

где $\varphi = f\left(x_{i_1},\ldots,x_{i_p},t_{s+1}\right)$; $\Lambda^\alpha=\sum_{r=1}^{p}\Lambda_r^\alpha$,

$$\Lambda_r^{\alpha_r}y^{s+1}=\frac{1}{h^{\alpha_r}}\left[(1-p_r)\sum_{l_r=0}^{N_r-i_r+1} g_{\alpha_r,l_r}y_{i_r+l_r-1}^{s+1} + p_r\sum_{l_r=0}^{i_r+1} g_{\alpha_r,l_r}y_{i_r-l_r+1}^{s+1}\right],$$

$$y_t^\beta=\frac{1}{\tau^\beta}\sum_{k=0}^{s+1} g_{\beta,k}\left(y^{s-k+1}-y^0\right).$$

В записи (7) приняты обозначения $y=y_{i_1,\ldots,i_p}^s=u\left(i_1,...,i_p,t_s\right)$, $y_{i_r-l+1}=y_{i_1,\ldots,i_r-l+1,\ldots,i_p}$. Здесь и далее, где это возможно, индексы $i_1,\ldots,i_p$ опущены. Полученная чисто неявная разностная схема (7) аппроксимирует исходную задачу с порядком $O\left(h+\tau\right)$, $h=\sum_{r=1}^{p}h_r$.

Обозначим $W^{\rho,1}\left(\mathbb{R}^p\right)$ совокупность всех функций $f\in C^\rho\left(\mathbb{R}^p\right)$ из класса непрерывно дифференцируемых функций до ρ-го порядка включительно, частные производные до порядка ρ которых принадлежат $L_1\left(\mathbb{R}^p\right)$, а частные производные порядка не выше $\rho-1$ обнуляются на бесконечности.

Утверждение 1. Пусть $f\left(x_1,\ldots,x_p\right)\in W^{\rho,1}\left(\mathbb{R}^p\right)$ и

$\Delta_{h_1,\ldots,h_p}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}f(x)=\sum_{k_1=0}^{\infty},\ldots,\sum_{k_p=0}^{\infty}(-1)^{k_1+\ldots+k_p}\binom{\alpha_1}{k_1},\ldots,\binom{\alpha_p}{k_p}f\left(x_1-\left(k_1-1\right)h_1,\ldots,x_p-\left(k_p-1\right)h_p\right)$. Тогда $\forall\, x\in\mathbb{R}^p$ при $\rho>\alpha_1+\ldots+\alpha_p+p+1$ выполняется

$$\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}},\ldots,\frac{\partial^{\alpha_p}}{\partial x_p^{\alpha_p}}f(x)=h_1^{-\alpha_1},\ldots,h_p^{-\alpha_p}\Delta_{h_1,\ldots,h_p}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}f(x)+O(h), \tag{8}$$

где $h=\sum_{r=1}^{p}h_r$.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{F}\left[f\right](\sigma)=\hat{f}\left(\sigma\right)=\int_{\mathbb{R}^p}e^{ix\cdot\sigma}f\left(x\right)dx$, $\sigma=\left(\sigma_1,\ldots,\sigma_p\right)$. Найдем преобразование Фурье функции $\Delta_{h_1,\ldots,h_p}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}f\left(x\right)$:

$$\mathcal{F}\left[\Delta_{h_1,\ldots,h_p}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}f\right](\sigma)=\prod_{r=1}^{p}\left(-i\sigma_r\right)^{\alpha_r}\lambda_r\left(-i\sigma_r h_r\right)\hat{f}\left(\sigma\right),$$

где $\lambda_r(z) = e^z \left(\frac{1-e^{-z}}{z}\right)^{a_r}$. Запишем последнее выражение в виде

$$\mathcal{F}\left[\Delta_{h_1,\ldots,h_p}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} f\right](\sigma) = \prod_{r=1}^{p}(-i\sigma_r)^{\alpha_r} \hat{f}(\sigma) + \prod_{r=1}^{p}(-i\sigma_r)^{\alpha_r}\left[\prod_{r=1}^{p}\lambda_r(-i\sigma_r h_r) - 1\right]\hat{f}(\sigma) =$$

$$= \mathcal{F}\left[\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_p}}{\partial x_p^{\alpha_p}} f\right] + \hat{\varphi}(\sigma).$$

С помощью неравенства $\|(\sigma_1 h_1, \ldots, \sigma_p h_p)\| \le h\|\sigma\|$, где $\|\cdot\|$ – норма в евклидовом пространстве, можно получить оценку $\left|\prod_{r=1}^{p}\lambda_r(-i\sigma_r h_r) - 1\right| \le Ch\|\sigma\|,\ C > 0.$ Принимая во внимание лемму Римана – Лебега, запишем следующие соотношения:

$$|\varphi| = \left|\frac{\Delta_{h_1,\ldots,h_3}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_3} f(x)}{h_1,\ldots,h_p} - \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_p}}{\partial x_p^{\alpha_p}} f(x)\right| = \frac{1}{(2\pi)^p}\left|\int_{\mathbb{R}^p} e^{-ix\cdot\sigma}\hat{\varphi}(\sigma)\,d\sigma\right| \le$$

$$\le Ch\int_{\mathbb{R}^p}(1+\|\sigma\|)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_p+1}\left|\hat{f}(\sigma)\right|d\sigma \le Ch\int_{\mathbb{R}^p}(1+\|\sigma\|)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_p+1-\rho}d\sigma.$$

Последний интеграл сходится при $\rho > \sum_{r=1}^{p}\alpha_r + p + 1.$ Утверждение доказано.

Замечание. Аналогичные выражения имеют место и для меньшего числа производных:

$$\frac{\partial^{\alpha_{j_1}}}{\partial x_{j_1}^{\alpha_{j_1}}}, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_{j_{p-1}}}}{\partial x_{j_{p-1}}^{\alpha_{j_{p-1}}}} f(x) = h_{j_1}^{-\alpha_{j_1}}, \ldots, h_{j_{p-1}}^{-\alpha_{j_{p-1}}}\Delta_{h_{j_1},\ldots,h_{j_{p-1}}}^{\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_{p-1}}} f(x) + O(h_{j_1} + \ldots + h_{j_{p-1}}), \tag{9}$$

$j_s \ne j_q$ при $s \ne q,\ j_q = \overline{1, p},\quad q = \overline{1, p-1}.$

Соотношения (8) и (9) позволяют факторизовать разностную схему (7), оставляя тот же порядок аппроксимации:

$$\prod_{r=1}^{p}\left(E - \tau^\beta\Lambda_r^{\alpha_r}\right)y^{s+1} = y^0 - \sum_{k=1}^{s+1} g_{\beta,k}\left(y^{s-k+1} - y^0\right) + \tau^\beta\varphi^{s+1}. \tag{10}$$

Схеме приближенной факторизации (10) эквивалентна схема дробных шагов:

$$\begin{aligned}
&\left(E - \tau^\beta\Lambda_1^{\alpha_1}\right)y^{s+1/p} = y^0 - \sum_{k=1}^{s+1} g_{\beta,k}\left(y^{s-k+1} - y^0\right) + \tau^\beta\varphi^{s+1},\\
&\left(E - \tau^\beta\Lambda_2^{\alpha_2}\right)y^{s+2/p} = y^{s+1/p},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\left(E - \tau^\beta\Lambda_p^{\alpha_p}\right)y^{s+1} = y^{s+(p-1)/p},
\end{aligned} \tag{11}$$

которая аппроксимирует исходную схему (7) с тем же порядком $O(h+\tau)$.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Чисто неявная схема (10) безусловно устойчива.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнения (11) вместе с граничными условиями представляют собой систему алгебраических уравнений. Запишем первое из уравнений (11) в матричной форме

$$A^{\alpha_1}Y_{i_2,\ldots,i_p}^{s+1/p} = Y_{i_2,\ldots,i_p}^0 - \sum_{k=1}^{s+1} g_{\beta,k}\left(Y_{i_2,\ldots,i_p}^{s-k+1} - Y_{i_2,\ldots,i_p}^0\right) + \tau^\beta R_{i_2,\ldots,i_p}^{s+1},$$

где $Y_{i_2,\ldots,i_p}^s = \left[y_{1i_2,\ldots,i_p}^s, y_{2i_2,\ldots,i_p}^s, \ldots, y_{(N_1-1)i_2,\ldots,i_p}^s\right]^T$ и $R_{i_2,\ldots,i_p}^s = \left[\varphi_{1i_2,\ldots,i_p}^s, \varphi_{2i_2,\ldots,i_p}^s, \ldots, \varphi_{(N_1-1)i_2,\ldots,i_p}^s\right]^T$, $i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, \ldots, i_p = \overline{1, N_p - 1}$. Тогда матрица $A^{\alpha_1} = \left(a_{i_1 m_1}\right)$, размером $(N_1-1)\times(N_1-1)$ будет иметь вид

$$a_{i_1m_1}=\begin{cases}1-\mu_1 g_{\alpha_1,1}, \quad m_1=i_1;\\ -(1-p_1)\mu_1 g_{\alpha_1,0}-p_1\mu_1 g_{\alpha_1,2}, \quad m_1=i_1-1;\\ -(1-p_1)\mu_1 g_{\alpha_1,2}-p_1\mu_1 g_{\alpha_1,0}, \quad m_1=i_1+1;\\ -(1-p_1)\mu_1 g_{\alpha_1,i_1-m_1+1}, \quad m_1>i_1-1;\\ -p_1\mu g_{\alpha_1,m_1+1}, \quad m_1<i_1-1,\end{cases}$$

где $\mu_1=\dfrac{\tau^\beta}{h^{\alpha_1}}$.

Отметим некоторые свойства коэффициентов $g_{\alpha,l}$, которые нам понадобятся далее. Известно [7], что $\sum\limits_{l=0}^{\infty} g_{\alpha,l}=0,\ g_{\alpha,0}=1,\ g_{\alpha,1}=-\alpha,$ и $\forall i=0,1,2,\ldots,\ -g_{\alpha,1}=\alpha\geq\sum\limits_{l=0,l\neq 1}^{l} g_{\alpha,l}$, причем $1>-\sum\limits_{l=0}^{i} g_{\alpha,l}>0,\ \forall i=1,2,\ldots$

На основании теоремы Гершгорина i_1-е собственное значение матрицы A^{α_1} лежит в круге радиусом $r_{i_1}=\sum\limits_{\substack{m_1=0,\\ m_1\neq i_1}}|a_{i_1m_1}|$ с центром в $a_{i_1i_1}$ и справедлива оценка

$$r_{i_1}=\sum_{\substack{m_1=0,\\ m_1\neq i_1}}^{N_1-1}|a_{i_1m_1}|=(1-p_1)\mu_1\sum_{\substack{m_1=0,\\ m_1\neq i_1}}^{N_1-i_1+1} g_{\alpha_1,i_1+m_1-1}+p_1\mu_1\sum_{\substack{m_1=0,\\ m_1\neq i_1}}^{i_1+1} g_{\alpha_1,i_1-m_1+1}\leq$$

$$\leq\mu_1\left[(1-p_1)\alpha_1+p_1\alpha_1\right]=\mu_1\alpha_1.$$

Поскольку $a_{i_1i_1}=1+\mu_1\alpha_1$, то все собственные значения матрицы A^{α_1} – не меньше единицы. Следовательно, все собственные значения обратной матрицы $\left(A^{\alpha_1}\right)^{-1}$ не превышают единицу, а значит,

$$\left\|\left(A^{\alpha_1}\right)^{-1}Y^s_{i_2,\ldots,i_p}\right\|\leq\left\|Y^s_{i_2,\ldots,i_p}\right\|. \tag{12}$$

Аналогично, если оставшиеся уравнения (11) задаются матрицами A^{α_r}, $r=\overline{2,p}$, то справедливы оценки

$$\left\|\left(A^{\alpha_r}\right)^{-1}Y_{i_1,\ldots,i_{r-1},i_{r+1},\ldots,i_p}\right\|\leq\left\|Y_{i_1,\ldots,i_{r-1},i_{r+1},\ldots,i_p}\right\|,\quad r=\overline{2,p}. \tag{13}$$

Если переписать систему уравнений (10) в матричном виде

$$DY^{s+1}=-\sum_{k=1}^{s+1} g_{\beta,k}Y^{s-k+1}+\tau^\beta R^{s+1},$$

то матрица $D=\operatorname{diag}\left(A^{\alpha_1},\ldots,A^{\alpha_p}\right)$ обратима в силу обратимости матриц A^{α_r}, причем из (12) и (13) следует, что $\left\|D^{-1}Y\right\|\leq\left\|Y\right\|\ \ \forall Y$.

Обозначим через ε^0 возмущение, приданное точному решению Y^0. При нахождении вектора Y^1 получим возмущение $\varepsilon^1=-g_{\beta,1}D^{-1}\varepsilon^0=\beta D^{-1}\varepsilon^0$, отсюда получаем $\left\|\varepsilon^1\right\|\leq\beta\left\|\varepsilon^0\right\|$. Далее найдем

$$\varepsilon^2=-g_{\beta,1}D^{-1}\varepsilon^1-g_{\beta,2}D^{-1}\varepsilon^0=\beta D^{-1}\varepsilon^1+\frac{\beta(1-\beta)}{2}D^{-1}\varepsilon^0$$

и

$$\left\|\varepsilon^2\right\|\leq\beta\left\|\varepsilon^1\right\|+\frac{\beta(1-\beta)}{2}\left\|\varepsilon^0\right\|\leq\frac{\beta(\beta+1)}{2}\left\|\varepsilon^0\right\|;$$

$$\varepsilon^3=-g_{\beta,1}D^{-1}\varepsilon^2-g_{\beta,2}D^{-1}\varepsilon^1-g_{\beta,3}D^{-1}\varepsilon^0=$$

$$=\beta D^{-1}\varepsilon^2+\frac{\beta(1-\beta)}{2}D^{-1}\varepsilon^1+\frac{\beta(1-\beta)(2-\beta)}{3!}D^{-1}\varepsilon^0$$

и

$$\left\|\varepsilon^3\right\|\leq\beta^2\left\|\varepsilon^0\right\|+\frac{\beta(1-\beta)(2-\beta)}{3!}\left\|\varepsilon^0\right\|=\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!}\left\|\varepsilon^0\right\|.$$

По индукции найдем

$$\varepsilon^n\| \le \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2),\ldots,(\beta+n-1)}{n!}\|\varepsilon^0\|. \tag{14}$$

При $n \to \infty$ из (14) следует $\|\varepsilon^n\| \to 0$. Утверждение доказано.

Следует отметить, что безусловная устойчивость неявной схемы (10) справедлива без дополнительных ограничений на операторы расщепления, в частности их коммутативность. Данная модель позволяет достаточно просто получить приближенное решение уравнения двусторонней аномальной диффузии в многомерной области любой размерности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тарасов В. Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. М.; Ижевск, 2011.

2. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamic approach // J. Phys. Rep. 2000. Vol. 339. P. 1–77.

3. Учайкин В. В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // УФН. 2003. Т. 173, № 8. С. 847–876.

4. Meerschaert M., Tadjeran C. Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations // Applied Numerical Mathematics. 2006. Vol. 56, № 1. P. 80–90.

5. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967.

6. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Аддитивные схемы для задач математической физики. М., 2001.

7. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск, 1987.

8. Abrashina-Zhadaeva N., Romanova N. A splitting type algorithm for numerical solution of PDEs of fractional order // Mathematical modeling and analysis. 2007. Vol. 12, № 4. P. 399–408.

Поступила в редакцию 25.11.13.

Игорь Андреевич Тимощенко – старший преподаватель кафедры высшей математики и математической физики.